Le sens dans tous les sens

Jean-Philippe Drouhard

Le sens dans tous les sens

Jean-Philippe Drouhard
I*UFM et IREM de Nice,*
UMR ADEF (Aix-Marseille Université et INRP)

Il y a 10 sortes de personnes : celles qui savent compter en binaire, et les autres.

À peu près tout le monde s'accorde sur l'importance à donner à la notion de sens en mathématiques. Toutefois, l'importance et l'urgence d'aider les élèves à donner du sens font qu'on se sent tenu de se précipiter vers la recherche de solutions didactiques intéressantes… sans toujours prendre le temps de se demander sérieusement de quoi on parle quand on parle de sens.

La relative pauvreté de la réflexion sur ce que c'est que le sens est alimentée en outre par le caractère complexe et difficilement accessible des théories existantes du sens (sémantique, sémiotique). Pourtant, à condition de ne pas se laisser intimider par les travaux des sémanticiens, on peut assez bien définir ce que sont *les* sens dans toutes leurs dimensions et dans tous les contextes en mathématiques : c'est ce que nous nous proposons de faire ici, ce qui permettra d'enrichir considérablement à la fois la réflexion sur les difficultés des élèves, et les propositions didactiques.

Les cinq sens en mathématiques

Afin de déterminer les principaux sens du mot « sens » en mathématiques, je vais utiliser un cadre théorique, l'*épistémographie*, développé au sein de l'équipe de recherche CESAME[1] (IREM et IUFM de Nice).

Pour commencer il faut distinguer cinq "couches" de description de l'activité de l'élève : les couches scolaire, didactique, de mathématisation, discursive et intra-discursive. Une bonne façon de s'y retrouver est de se poser à chaque fois à chaque niveau : « qu'est-ce que ça veut dire : "ça n'a pas de sens" ? ». À chaque couche correspondra au moins une acception différente du mot « sens ».

1. *Le sens social et anthropologique* est celui, pour l'élève, de son rapport à l'école : pourquoi aller à l'école? Pourquoi apprendre? Pourquoi obéir? On est ici, entre autres, dans la problématique de la citoyenneté (qui après avoir été une tarte à la crème des directives officielles est un peu en déclin). Les mathématiques ne font par définition pas partie de ce sens de l'école. Toutefois elles y contribuent (parmi d'autres disciplines) en ceci que plus les élèves donneront du sens (selon les acceptions qu'on lira ci-après) à leurs activités mathématiques, et moins ils se poseront la question de savoir pourquoi ils sont à l'école.

2. *Le sens du contrat didactique* est situé au niveau de ce que Guy Brousseau[2] appelle le contrat didactique : qu'est supposé faire l'élève? qu'est supposé faire l'enseignant? pourquoi apprendre le cours? pourquoi faire des exercices? etc. L'exemple bien connu d'effet de contrat didactique est le problème de type suivant : « deux moutons et trois vaches montent sur un bateau, quel est

[1] « Construction Expérientielle des Savoirs avec Autrui dans les Mathématiques Enseignées »

[2] didacticien des mathématiques, médaille Felix Klein (2003) de la Commission Internationale de l'Enseignement des Mathématiques. Ses travaux ont entre autres inspiré la collection ERMEL (INRP).

l'âge du capitaine? »[3]. Peu d'élèves refusent de répondre, et ils affirment que le capitaine a cinq ans. L'intéressant est que, lorsqu' on leur fait remarquer l'incongruité de leur réponse, ils disent en substance que ce n'est pas grave, « parce qu'on est en maths ». Autrement dit, ce genre de problème idiot a bien un sens : servir à faire des additions. C'est ce que nous appellerons le sens du contrat didactique. Or, pour l'élève, ce sens doit être présent, sans quoi il n'a aucune raison de participer à l'activité demandée.

Le rôle, délicat, de l'enseignant est ici d'aider l'élève à donner un sens du contrat didactique aux activités mathématiques demandées. Il s'agit, un peu comme en EPS, à la fois d'assurer l'élève (minimiser le danger pour rendre acceptable la prise de risque) et de valoriser sa réussite (c'est-à-dire montrer que cela valait bien la peine de s'engager dans l'activité) - et ce, sans lui « mâcher le travail » car sans risque il n'y a pas de réussite.

3. *Le sens lié à la mathématisation du réel*: ici, le sens va découler directement de la relation entre les mathématiques et le "monde réel" : physique, économique ou simplement quotidien. Trop souvent, cette articulation est défaillante. Pour les élèves, dire que les mathématiques n'ont pas de sens veut dire qu'elles sont déconnectées du réel (comme dans le cas de l'âge du capitaine), qu'elles n'existent que dans les livres de maths. De nombreuses recherches en didactique des mathématiques ont porté sur cette mathématisation de la réalité[4].

L'exploration de l'environnement de la salle de classe fournit déjà une source quasi-inépuisable de questions mathématiques réelles: au lieu d'additionner des vaches virtuelles à des moutons virtuels, pourquoi ne pas additionner des fenêtres réelles pour connaître le nombre de vitres qu'il y a dans la classe? Ou encore, pourquoi ne pas déterminer (pour des élèves plus grands) le volume du tableau noir? Enseigner les sciences passe par la modélisation; il en va de même en mathématiques.

4. *Le sens lié à la cohérence du discours*. On dit d'un discours qu'il n'a « pas de sens » lorsqu'on n'arrive pas à voir quel rapport les éléments de ce discours ont entre eux. Or il se trouve que beaucoup d'éléments du discours mathématique, surtout écrit, sont implicites. On a tendance à n'énoncer que l'essentiel (ce qui est non évident sur le plan mathématique) et à laisser plus ou moins implicite le reste – alors que c'est parfois justement ce qui permet de faire tenir les éléments du discours ensemble.

L'enseignant -comme en cours de français- doit aider l'élève à donner du sens (discursif) aux démonstrations et aux longs enchaînements de calculs. Par ailleurs, il doit se méfier des manuels qui débitent le programme en tranches, empilées ensuite selon une sorte d'algorithme répétitif (calcul – problèmes – géométrie – calcul – problèmes – géométrie etc...) aux dépens du sens discursif global.

5. La cinquième couche est appelée « intra-discursive »: elle concerne les calculs (entre autres), numériques ou littéraux, qui se déroulent au sein d'un discours mathématique. Le sens, ici, va se présenter sous au moins quatre aspect différents, et pour arriver à les saisir nous allons décrire

---

[3] problème dit de l'âge du Capitaine, cité, parmi d'autres, par Stella Baruk dans l'ouvrage éponyme (1998).

[4] Voir, parmi beaucoup d'autres, les travaux sur la modélisation: Mariana Bosch, Yves Chevallard. Citons également le travail, développé principalement en Italie, sur les « domaines d'expérience » (Paolo Boero, Nadia Douek), issus de l'environnement naturel (par exemple, les ombres) ou culturel (par exemple, la monnaie).

quatre types de système d'objets de savoir nécessaires pour mener à bien l'activité mathématique intra-discursive.

Quatre systèmes d'objets de savoir

5a. Le premier système est constitué des *objets mathématiques* (les nombres, les grandeurs, les figures planes, les solides...) et *leurs relations* (le fait d'être un nombre pair, ou d'être un triangle rectangle, le fait que si un nombre est multiple de 6 alors il est multiple de 3, le théorème de Pythagore...). Le sens, ici, va résider dans le *réseau des relations* entre objets que l'élève est susceptible d'établir (par exemple entre les différents aspects de la proportionnalité, entre numération décimale de position et tableaux de conversions entre grandeurs, ou encore entre sommes et produits d'une part et produits et puissances d'autre part).

L'enseignant, ici, a un rôle analogue à celui qu'il aurait en cours de sciences ou d'histoire: aider l'élève à « donner du sens » à un ensemble de faits disparates en mettant en lumière les relations qui les unissent.

5b. Le second est constitué par les *représentations sémio-linguistiques* (les écritures symboliques telles que « 3+3 », les figures géométriques, les tables, les graphiques etc.). Les calculs s'effectuent en opérant sur de telles écritures, lesquelles signifient quelque chose (des objets mathématiques ou des relations entre ces objets).

Ici, suivant G. Frege[5], fondateur de la logique moderne, la notion de *sens* est double. Il y a la *dénotation* qui est ce que l'écriture désigne (la dénotation de « 3+3 » est le nombre six) et le *sens proprement dit*, qui est le "programme de calcul" permettant de déterminer la dénotation (ici, le sens proprement dit de « 3+3 » est que le nombre six s'obtient en ajoutant trois à lui-même). À une même dénotation (le nombre six, par exemple) correspondent de nombreux sens distincts : le double de trois, le successeur de cinq, la moitié de douze, la racine carrée de trente-six, etc. L'élève, pour "donner du sens" aux signes qu'il lit, doit donc à la fois savoir ce que ceux-ci dénotent, et comment ils le dénotent[6]. Sinon, pour lui, les mathématiques, c'est du chinois!

Le rôle de l'enseignant est ici, comme dans un cours d'anglais (ou de chinois) d'aider l'élève à lire et à écrire, autrement dit à maîtriser la dénotation et le sens proprement dit des discours de la langue étudiée.

5c. Le troisième est constitué des *instruments*: *matériels*, comme la règle et le compas ; *sémio-linguistiques*, comme les algorithmes de calcul (qui portent sur des écritures qui sont elles-mêmes des signes) ; *notionnels*, comme les propriétés que l'on va utiliser pour résoudre les problèmes (par exemple que, dans le plan, deux droites perpendiculaires à une troisième sont parallèles entre elles) ; et enfin *stratégiques* (par exemple qu'il est plus facile d'ajouter un petit nombre à un grand que l'inverse).

Ce ne sont pas les instruments en eux-mêmes qui ont un sens[7] mais bien leur *mise en œuvre*, qui peut être ou non adéquate avec le but que l'on s'est proposé. Combien d'élèves posent des quantités d'opérations qui n'ont "aucun sens", c'est-à-dire, qui ne servent à rien d'autre que d'imiter l'apparence d'une production mathématique?

[5] Gottlob Frege (1848-1925) : mathématicien, logicien et philosophe allemand.
[6] voir l'exemple du « 10 » binaire : en écriture en base deux, « 10 » représente le nombre deux.
[7] Ludwig Wittgenstein : « un outil n'a pas de sens, il n'a que des usages ».

L’enseignant doit ici, comme dans un cours de technologie, aider les élèves à maîtriser correctement et à bon escient les outils mis à leur disposition.

5d. Quatrième système d’objets de savoir : *les règles du jeu mathématique*, qui régissent, par exemple, le pourquoi et le comment des démonstrations ou encore l’usage légitime des instruments : dans quels cas a-t-on ou non le droit à une calculette? Quand faut-il utiliser l’équerre, la règle et le compas, ou simplement une règle graduée? etc. C’est ce sens des règles qui est en jeu quand l’élève demande « pourquoi il faut poser l’opération? », « Pourquoi je n’ai pas le droit d’utiliser mon rapporteur comme gabarit pour tracer un cercle? ». Ce sens des règles diffère du sens instrumental que nous venons de voir, dans la mesure où la réponse est ici conventionnelle (il faut le faire parce que sinon ça fait autre chose que ce qu’on veut faire) alors que dans le cas des instruments elle est pratique (il faut le faire parce que sinon ça ne marche pas, ou ça marche mal).

Ici l’enseignant (comme en EPS[8]) doit *négocier* avec l’élève l’acceptation de ces règles.

Tout ce qui précède concerne les aspects des savoirs mis en jeu dans une activité mathématique; mais signalons également la dimension proprement didactique, où ce sont les *situations de référence* qui constituent le *sens* des connaissances apprises [9].

En bref, après ce vaste panorama, un moyen pratique de savoir de quoi on parle peut être retenu : celui de toujours se demander le « sens » *de quoi* ? Car selon que l’on parle du sens d’une connaissance apprise, d’une activité, d’un raisonnement, d’un énoncé, d’une écriture etc., on ne parle pas de la même chose; et les difficultés des élèves et les moyens d’y remédier ne se sont pas de même nature.

Arroser les plantes tous les jours...

Terminons, en revenant à des considérations pédagogiques, par la *métaphore du jardinier*. De nombreux enseignants débutants se plaignent de ce que leurs élèves, même s’ils "suivent" les activités introductives (censées "donner du sens" aux notions traitées) n’en tirent aucun profit à long terme. C’est que le sens, dans toutes ses composantes, est un peu analogue à l’eau pour les plantes. Se plaindre de ce que le sens des notions introduites ne reste pas, c’est comme dire « mais je l’ai déjà arrosée une fois, cette plante ! qu’est-ce qu’il lui faut de plus? » Le sens, ce n’est pas comme un élément de savoir qu’on pourrait supposer acquis ; le sens, comme l’eau, ça doit circuler, être constamment renouvelé. Le jardinier doit arroser ses plantes tous les jours, jusqu’à ce qu’elles soient capables d’aller chercher l’eau par elles-mêmes avec leurs racines... tout comme l’élève finit par savoir faire des recoupements et des rapprochements et donner par lui-même du sens à ce qu’on lui enseigne.

Or, la grande difficulté de l’enseignement des mathématiques est que nous autres professeurs de mathématiques sommes des espèces de plantes xérophiles, comme le cactus, sélectionnés sur leur tolérance au "stress sémantique", capacité à attendre des semaines entières avant de comprendre un peu à quoi sert et comment fonctionne la théorie qu’on leur enseigne. Ce qui caractérise les mathématiciens, c’est leur tolérance à l’absence (provisoire) de sens (comme

[8] Voir les travaux de Jacques Méard et Stefano Bertone (IUFM de Nice)

[9] Voir la *Théorie des Situations* de Guy Brousseau ou les *Champs Conceptuels* de Gérard Vergnaud (Psychologue, CNRS).

on parle de tolérance à la sècheresse). Abraham Arcavi[10] a observé que ce qui distingue les mathématiciens d'autres intellectuels (par exemple d'éminents professeurs d'université de droit ou de littérature), c'est que ces derniers ne tolèrent pas de ne pas comprendre tout de suite.

Malheureusement - ou heureusement- les élèves ne sont pas tous destinés à vivre dans le désert du sens, et c'est cela le défi majeur posé au professeur de mathématiques : lui qui a été sélectionné pour ses capacités de tolérance à l'absence de sens, doit apprendre à *tolérer l'intolérance à l'absence de sens* de ses élèves. Certes, il doit les amener à différer petit à petit leur demande de sens, mais jamais jusqu'à son propre niveau.

En guise de conclusion, on peut "donner du sens" aux actes et aux discours des promoteurs des actuelles contre-réformes de l'enseignement, quand on comprend qu'ils croient, entre autres billevesées, que ce qu'a toléré un tout petit nombre (que le sens vient bien après la technique), est applicable à la totalité des élèves. C'est non seulement simpliste et grossièrement faux, mais encore cela revient à négliger ce que disent toutes les recherches actuelles en sociologie et en psychologie du travail : celui qui n'arrive pas à donner (ou à trouver) du sens à ce qu'on lui dit de faire, non seulement est inefficace mais surtout il souffre; et la souffrance existentielle due à la perte de sens (souffrance trop souvent confondue avec l'effort) n'a jamais rendu efficace, bien au contraire.

[10] Didacticien israélien (Weizman Institute)